

立体モデルおよびスライド・タブレットを併用した数学教材の開発

長野高専一般科 濱口直樹, 城西大学理学部 大島利雄, 東邦大学理学部 高遠節夫

1 はじめに

高専や大学初年級における数学教育においては, 2変数関数のグラフとなる曲面などの空間図形の理解が必要不可欠である. 高等学校の数学教育において, 回転体などの立体の体積を扱う場合も同様である.

これらを黒板やノートに描くことは困難な場合が多いが, 現在では次のような様々な形式の教材を用いることができる:

1. プリント
2. スライド
3. タブレット
4. 立体モデル

我々が整備を進める教材作成支援ツール $K_{\mathbb{E}T}Cindy$ [2, 3] を用いることにより, 上記すべての教材のための図形データを作成することができる. 最新版の $K_{\mathbb{E}T}Cindy$ には pdf 形式のスライドを容易に作成できる機能が追加された.

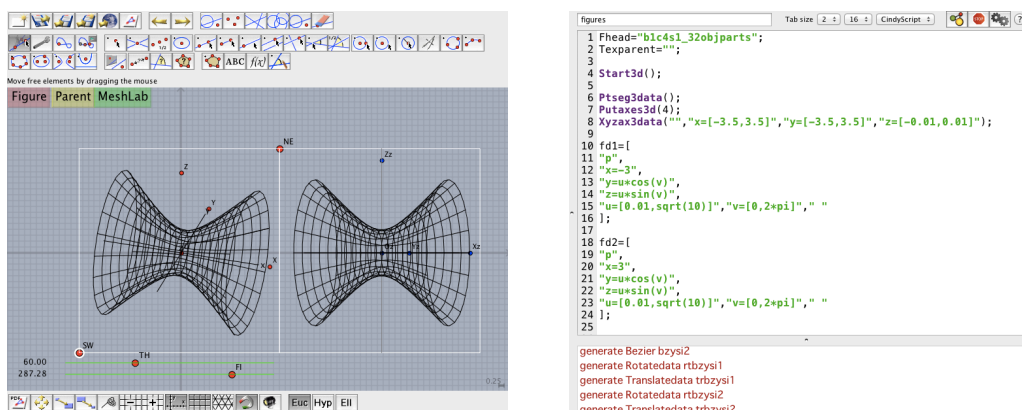


図 1. $K_{\mathbb{E}T}Cindy$ による図形データ作成: Cinderella による描画 (左) とスクリプト画面 (右)

平成 28 年度には東邦大学において, 極座標による重積分をテーマとして, 上記の 4 種類の教材を併用した授業を実施した. 授業後のアンケートでは, スライド教材に対する学生の評価が我々の予想を超えて高いものであった. また, タブレット教材や立体モデル教材についても, それらを手にしながらかんだ内容の理解だけでなく, その後の授業内容の理解にも間接的に良い影響を与えている様子が見られた [1]. このことは, 空間図形を扱い始める早い段階でしっかりとイメージする力をつけることの重要性を示唆している.

これらの観点から, 立体の体積をテーマとした内容について, 立体モデルおよびスライド・タブレットを併用する授業を設計した. 対象とした学生は高専の 2 年生であるが, テーマは高等学校の数学 III の内容である. 本稿では, 当該授業の概要と授業後のアンケート結果について述べる.

2 授業設計 – 立体の体積 –

本節では、授業設計の概要について述べる。対象とする学年等は以下の通りである。

- 学年：高専2学年 39名
- 科目：微分積分I(1変数関数の微分積分)
- 内容：立体の体積
- 時間：70分

授業では、次の2つの内容を扱う。

- (1) xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = a, x = b$ ($a < b$) で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V とすると、次が成り立つ。

$$V = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx$$

- (2) x 軸上の点 x を通り、 x 軸に垂直な平面による切り口の面積が $S(x)$ である立体について、平面 $x = a, x = b$ ($a < b$) の間の部分の体積を V とすると、次が成り立つ。

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

高専や高等学校でこれらの内容を学ぶ際には、上記(2)の説明の後に(1)が示されることが多いが、(2)は学生にとって理解しやすい内容とはいえ、この授業ではイメージしやすい回転体を先に取り上げることとした。

なお、対象となる高専2年生は、定積分については区分求積法による導入を行い、置換積分や部分積分を含む積分の計算方法を一通り学んだ学生である。

授業の最初に、図2のプリント教材を配付する。このプリントには授業の説明で用いる回転体の元となる図形が描かれており、回転してできる様子を書き込むことも可能である。さらに、理解を深めるための問題演習でも用いる。

授業は回転面の説明から始める。例として、曲線 $y = \sqrt{1+x^2}$ を x 軸のまわりに回転した回転双曲面を取り上げる。本授業のスライドでは、この説明の通りに曲面ができあがる様子を表現している。図3は、そのスライドのうちの9枚である。実際には、21枚からなるpdfファイルのページを進めることで、“パラパラ漫画”のように曲面を作り上げる。

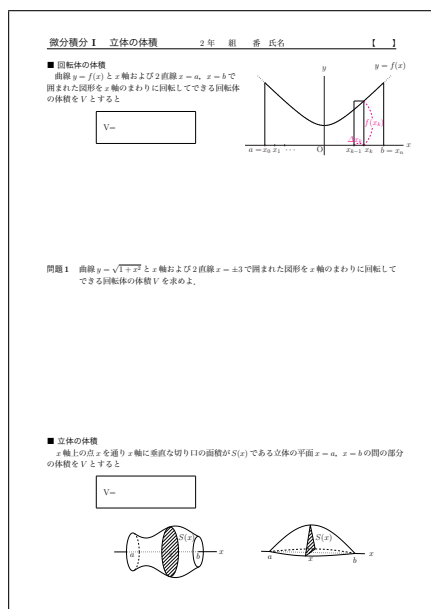


図2. 問題演習のためのプリント教材

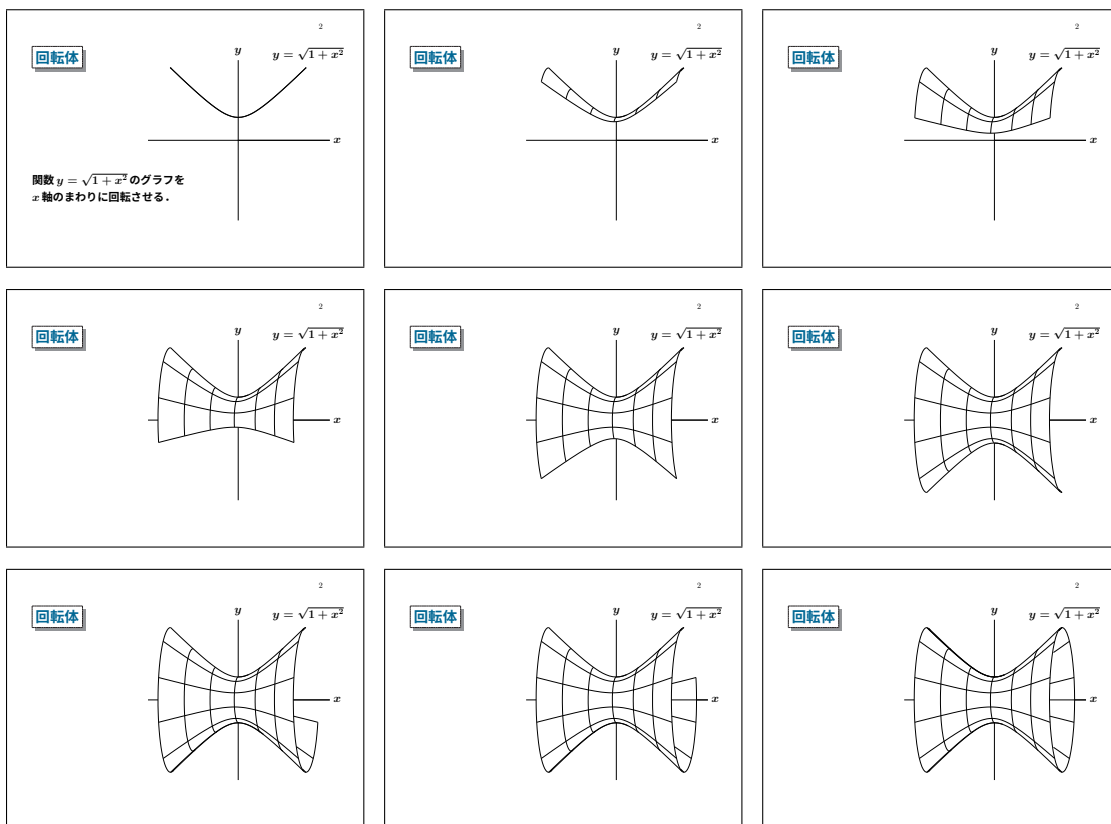


図 3. スライド教材：回転双曲面

ここで、学生の理解度も様々であることを考慮し、また、空間図形のイメージをしっかりと持たせるために、図 4 左の立体モデルと同右のタブレット教材を用いる。立体モデル教材は 3 個を回覧し、タブレットは 7 台準備して、5~6 人のグループに 1 台の割合で貸与する。タブレット教材は obj 形式のファイルを 3D ビューワーによって描画したもので、画面に触れながら様々な角度で空間図形を見ることができる。

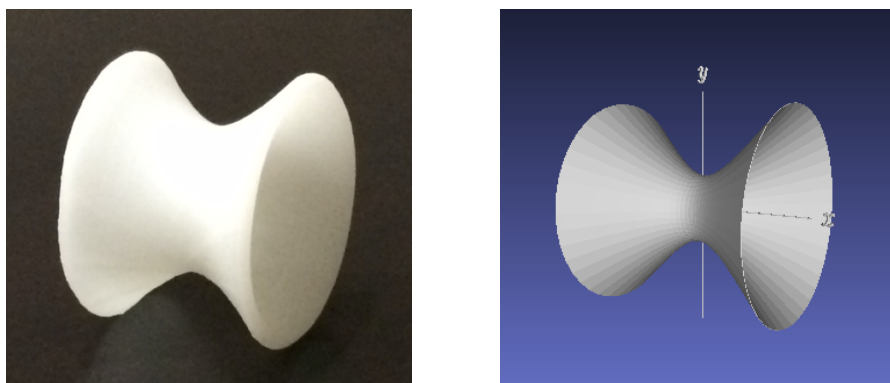


図 4. 立体モデル（左）とタブレット教材（右）

次に，図5のスライドにより，回転体の体積がどのように計算されるかの説明に入る．図7のスライドのように，区間 $[a, b]$ を分割して，半径が $f(x_k)$ ，高さが Δx_k の円柱を考え，体積はこれらの円柱の体積の総和の極限值となるという説明につなげるため，まずは，図6のように幾つかの段階に分けたタブレット教材によりイメージをつかませる．なお，授業の最初に配付したプリント教材には，図7左の図が描かれている．

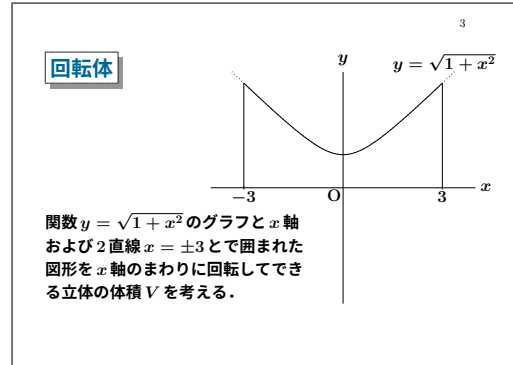


図5. スライド教材：回転体の体積の計算

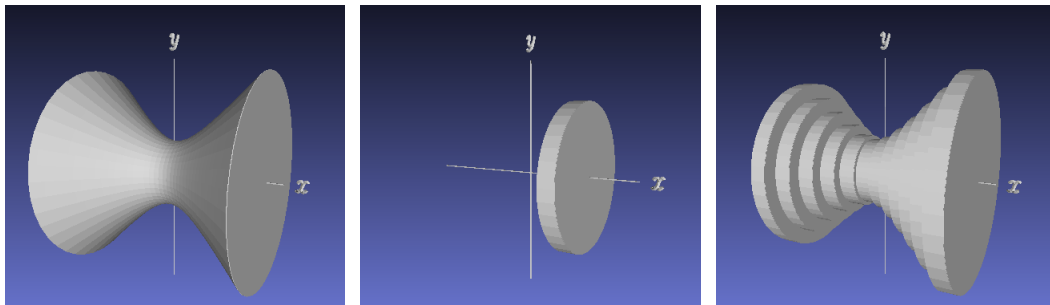


図6. タブレット教材：回転体の体積の計算

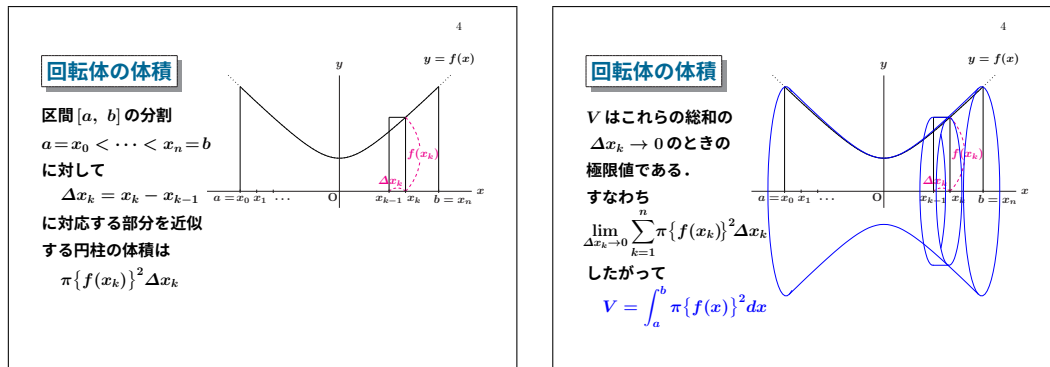


図7. スライド教材：回転体の体積の計算

回転体の体積の公式を導出後，例で用いた回転体の体積を求める．配付したプリントには問題1として載せてある．タブレットを見ることやグループ内での相談も許可する．また，ここまでの内容についてのプリントへの書き込み等を含め確認を行う．

問題1の解答が済んだ頃を見計らって，次のテーマである x 軸に垂直な切り口の面積が $S(x)$ で表される立体の体積の説明に移る．図8のスライドのように，切り口が円となる回転体と比較しながら，段階的に提示して説明を行う．また，その切り口は三角形とし， x により大きさの異なる様子がわかりやすい図を用いる．さらに，プリントだけでは理解の難しい部分を補うために，図9のタブレット教材を準備する．

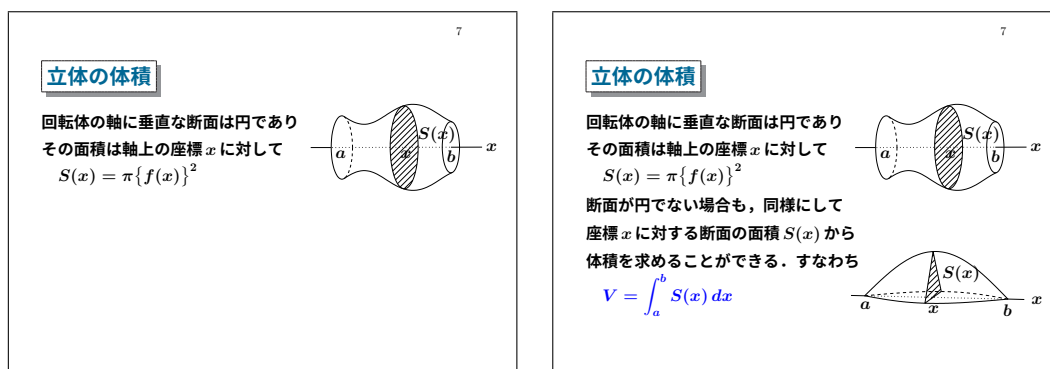


図 8. スライド教材：立体の体積

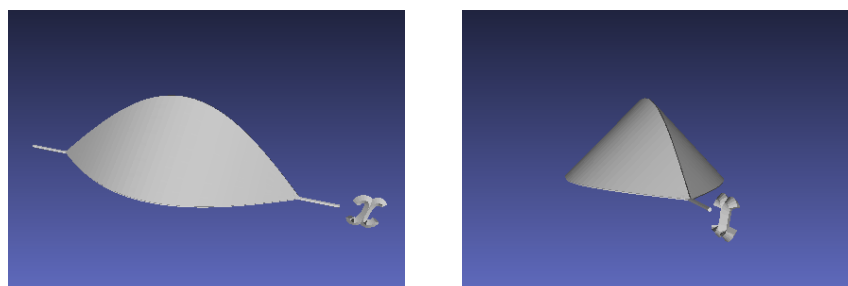


図 9. タブレット教材：立体の体積

最後にグループ内でのディスカッションを許可しながら，授業全体の理解を深めるための問題演習を行う．授業の最初に配付したプリントの裏面にある以下の問題に解答する．

問題 2. 底面の半径が r で高さが h の円錐の体積 V を積分で求めよ．

問題 3. 底面が 1 辺 a の正方形で高さが h の正四角錐の体積 V を積分で求めよ．

問題 4. 半径 r の球の体積 V を求めよ (円の上半分の方程式が $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ であることを用いよ.)

タブレットには図 10 の円錐，正四角錐の教材も準備されており，学生はこれらを演習問題のヒントとして利用できる．

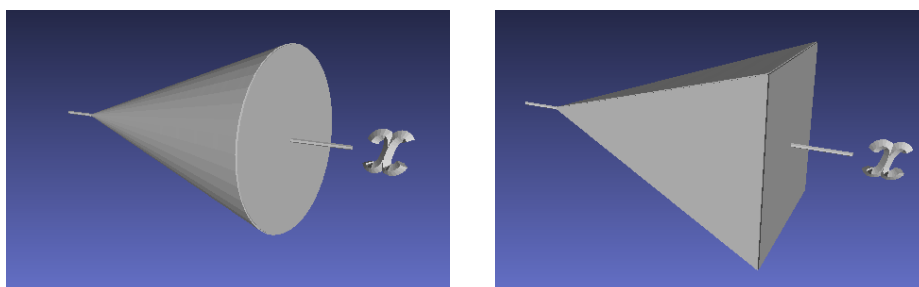


図 10. タブレット教材：演習問題の図形

3 アンケート結果

前節の設計に従って授業を行った後，アンケート調査を実施した．本節では，その結果について述べる．

(設問 1) 立体の体積に関する次の (1) ~ (3) の授業内容について，用いた教材のわかりやすさを次の 4 段階で回答

○ : とてもわかりやすい △ : わかりやすい □ : ふつう × : わかりにくい

なお，表中の数値は回答した学生数である．

(1) 曲線や直線で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の形状

				×	未記入
プリント	13	23	3	0	0
スライド	24	14	1	0	0
タブレット	27	11	1	0	0
立体モデル	19	17	0	0	3

(2) 回転体の体積がどのようにして求められるか

				×	未記入
プリント	15	23	1	0	0
スライド	19	18	2	0	0
タブレット	19	16	4	0	0
立体モデル	12	21	3	0	3

(3) 断面の面積が $S(x)$ で表される立体の体積がどのようにして求められるか

				×	未記入
プリント	15	19	4	1	0
スライド	18	18	3	0	0
タブレット	19	13	7	0	0
立体モデル	10	21	4	0	4

(設問 2) わかりやすいと思う教材の組み合わせを回答

- プリント・スライド・タブレット (12 名)
- 4 つ全てを使用 (8 名)
- プリント・スライド (6 名)
- プリント・タブレット (5 名)

- プリント・スライド・立体モデル (3名)
- プリント・立体モデル (2名)
- スライド・タブレット (2名)
- プリント・タブレット・立体モデル (1名)

(設問3) 授業に対する学生の感想

授業の方法や教材に関するコメント

- 楽しかった・おもしろかった (10名)
- タブレットがわかりやすい (4名)
- 友人と話し合いながら問題を解くのがよかった (3名)
- スライドで図を見たらよくわかった (2名)
- タブレットや立体モデルでイメージしやすかった (2名)
- わかりやすかった (2名)
- タブレットやスライドを参考にしながら問題を解くことで理解が深まった
- スライドやタブレットがあってわかりやすかった
- いつもより自分で考えることができた
- プリントもわかりやすくまとめることができてよかった
- 実際に立体モデルを見てわかりやすかった
- タブレットは友人に教えたりするときなどに役に立った
- 立体モデルはよくできていると思った
- タブレットや立体モデルがあり話がイメージしやすかった
- タブレットは、操作に得意不得意があったり、全員がしっかり体験できなかったり、先生の話に集中できなかったりする
- タブレットを使うときに騒がしくなる

授業内容に関するコメント

- 球や円錐の体積の公式を積分で導くのが楽しかった・感動した (9名)
- 積分の大切さを感じた (3名)
- 積分が立体にも使えることで積分の奥の深さを感じた
- 断面の面積を積分して体積が求められるのは不思議だと思った
- 少し難しかった
- 理解できなくて大変だった

4 まとめと今後の課題

高専の2年生を対象として、立体モデルおよびタブレット、スライド、プリントを併用して設計した授業を実施した。積分の定義やその計算方法を学び、平面図形の面積との関係を理解しつつある段階の学生を対象として、立体の体積を積分で求めるといふ、親しみもあるわかりやすいテーマであり、前節のアンケートを見ても、学生自身が達成感を味わいやすい内容であったことがうかがえる。

用いた各教材もわかりやすさの評価は高いものであった。授業に対するコメントにも表れているが、学生の学力や空間図形の理解力は多様であり、今後扱う図形が複雑になる場合も含め、様々なスタイルの教材を併用することが学生の理解の助けとなるであろう。

今回のように空間図形を扱う最初の段階において、回転体や正四角錐など基本的な内容を用いて、しっかりと数学的にイメージできるようになることは、今後さらに空間図形を学んでいく上でも効果的であると考えられる。

本授業においては、タブレット教材における3DビューワーとしてEmb3D [4] を使用し、教員のPC上ではMeshlab [5] を用いた。いずれもフリーソフトである。タブレットがない場合でも、教員のPCに3Dビューワーをインストールすることにより、同様の図形をスライドで提示することもできる。学生自らが実際に手で動かすこと、手に取ることは差はあるものの、これまでの教材にプラスするだけでも効果があるものと考えられる。

スマートフォンの使用や学生のPCへのデータの配付に関する環境の整備は、それぞれの学校により状況が異なることが考えられる。教材の事前配付や事後配付、さらにはノートを取り方を含めた学生が学習しやすい授業設計など、検討すべき課題もある。

5 謝辞

本研究はJSPS 科研費 15K00944 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Hamaguchi, N., Takato, S., Producing Teaching Materials for Spatial Figures with KeTCindy and the Educational Benefits of Combining Materials, ICCSA 2017, Part IV, LNCS 10407, pp. 262–272 (2017)
- [2] Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., Maeda Y., Nakamura Y., Kortenkamp U, Takato S.: KETCindy— Collaboration of Cinderella and KETpic. Reports on CADGME 2014 Conference Working Group, The International Journal for Technology in Mathematics Education, 22(4), 179–185 (2015)
- [3] <http://www.ketpic.com>
- [4] <http://www.emb3d.com>
- [5] <http://meshlab.sourceforge.net>